

2018~2019学年天津和平区高二下学期期中数学试卷

一、选择题 (本大题共8小题, 每小题3分, 共24分)

1. 已知向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, 则下列向量中与 $\vec{a}$ 平行的是 ().
- A. $(1, 1, 1)$ B. $(-4, 6, -2)$ C. $(2, -3, 5)$ D. $(-2, -3, -1)$
2. 若直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = (-2, 3, 2)$, 则 l_1 与 l_2 的位置关系是 ().
- A. $l_1 \perp l_2$ B. $l_1 // l_2$ C. l_1, l_2 相交不垂直 D. 不能确定
3. 下列求导运算正确的是 ().
- A. $(\cos x)' = \sin x$ B. $(\log_2 x)' = \frac{x}{\ln 2}$
 C. $(\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ D. $(3^x)' = 3^x \log_3 e$
4. 已知曲线 $y = x^2$ 上一点 P 处的切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 平行, 则点 P 的坐标为 ().
- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 1)$ C. $(2, 4)$ D. $(3, 9)$
5. 若函数 $y = a(x^3 - x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$
6. 在空间四边形 $OABC$ 中, $OA = OB = OC$, $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3}$, 则 $\cos \langle \vec{OA}, \vec{BC} \rangle$ 的值为 ().
- A. 0 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
7. 已知两平面的法向量分别为 $\vec{m} = (0, 1, 0)$, $\vec{n} = (0, 1, 1)$, 则两平面所成的二面角为 ().
- A. 45° B. 135° C. 45° 或 135° D. 90°
8. 函数 $y = \frac{ax^2 - 1}{e^x}$ 存在极值点, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $a < -1$ B. $a > 0$ C. $a \leq -1$ 或 $a > 0$ D. $a < -1$ 或 $a > 0$

二、填空题（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

9. 已知 $A(4,1,3)$, $B(2,-5,1)$, C 为线段 AB 上一点, 且 $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$, 则点 C 的坐标为 _____ .

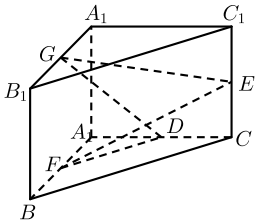
10. 若 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3 - a$ 对任意的 $x \in [-2, 2]$ 都有 $f(x) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 _____ .

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$, $x \in (0, \pi)$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____ .

12. 已知 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2}$ ($m < 0$), 直线 l 与函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都相切, 且与函数 $f(x)$ 的图象的切点为 $(1, f(1))$, 则 m 的值为 _____ .

13. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值为10, 则 $f(2) =$ _____ .

14. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 1$, 已知 G 和 E 分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点, D 和 F 分别为线段 AC 和 AB 上的动点 (不包括端点), 若 $DG \perp EF$, 则线段 DF 长度的取值范围为 _____ .



三、解答题（本大题共6小题，共52分）

15. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), 且 $f'(-1) = f'(3) = 0$.

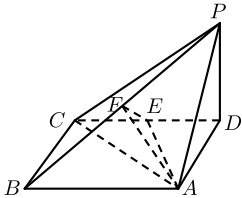
爱智康 (1) 求 a, b 的值.

爱智康

爱智康

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD = PD = 2$ ， E, F 分别为 CD, PB 的中点.



- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAB .
- (2) 设 $AB = \sqrt{2}AD$, 求直线 AC 与平面 AEF 所成角 θ 的正弦值.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + x + b (a \geq 0)$, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(1) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴交点为 A , 曲线 $y = f(x)$ 在 A 点处的切线方程是 $y = 3x - 3$, 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x) = e^{-ax} \cdot f'(x)$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间.

19. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(1) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $2f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 证明: 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $\ln x \geq \frac{1}{e^x} - \frac{2}{ex}$ 恒成立.